MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I A GRUBU FİNAL SORULARI-CEVAPLARI

.01.2021

1. $y = xy' + (y')^2 + 2y' + 1$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' = p,\ y = xp + f(p)$ clairaut denklemi olup

$p = c$ için $y = xc + f(c)$ genel çözümdür

A) $y - cx = c^2$

B) $y = (cx+1)^2$

C) $y + 2c + c^2 = x$

D) $y - cx = c^2 + x$

E) $y = cx + (c+1)^2$

$y = xp + p^2 + 2p + 1$ clairaut denklemi

$p = c$ için $y = xc + c^2 + 2c + 1$

$y = xc + (c+1)^2$ genel çözüm

2. $3x - y' = \dfrac{y}{x}$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' + \frac{1}{x} y = 3x$ lineer dif denk

$\lambda(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$ olmak üzere

$x \cdot y = \int 3x \cdot x\,dx + c \Rightarrow xy = x^3 + c$ genel çözüm

A) $yx = x^3 + c$

B) $y = x^3 + c$

C) $yx = x^2 + c$

D) $y = 3x^3 + c$

E) $yx = 3x^3 + c$

3. $(y')^2 + (x+y)y' + xy = 0$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' = p \Rightarrow p^2 + (x+y)p + xy = 0 \Rightarrow (p+x)(p+y) = 0$

A) $(y^2 + x - c)(\ln y + x - c) = 0$

B) $\left(y + \dfrac{x^2}{2} - c\right)(\ln y + x - c) = 0$

C) $c^2 + (x+y)c + xy = 0$

D) $(c+x)(c+y) = 0$

E) $\left(y + \dfrac{x^2}{2} - c\right)(y + x - c) = 0$

$\cdot\ p + x = 0 \Rightarrow y' = -x \Rightarrow dy = -x\,dx \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + c$

$\cdot\ p + y = 0 \Rightarrow y' = -y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -dx \Rightarrow \ln y = -x + c$

$\left(y + \frac{x^2}{2} - c\right)(\ln y + x - c) = 0$

4. $c > 0,\ \ y^2 - x^2 = c$ **eğri ailesini aşağıdakilerden hangisi dik keser?** eğimleri çarpımı -1 olmalı

$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$ dır.

A) $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

B) $x = y^2 \rightarrow 1 = 2yy' \rightarrow y' = \frac{1}{2y}$

C) $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{x}{y}$

D) $xy = 1 \rightarrow y + xy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{y}{x} \longrightarrow \left(-\frac{y}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{y}\right) = -1$ olur ✓

E) $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow 2x - 2yy' = 0 \rightarrow y' = \frac{x}{y}$

5. $(y^n - x^n)y' + x^{n-1}y = 0,\ \ x, y > 0$ **denklemi hangi** n **değeri için tam diferansiyel denklem olur?**

$\underbrace{(y^n - x^n)}_{N} dy + \underbrace{x^{n-1}y}_{M} dx = 0$

A) -2

B) -1

C) 0

D) 1

E) 2

$M_y = x^{n-1}$

$N_x = -n x^{n-1}$

$n = -1$ için $M_y = N_x$ olup TD olur

6. $x^2y' = xy - y^2$ **denklemine** $u = u(x)$ **olmak üzere** $y = ux$ **dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki denklemlerden hangisi elde edilir?**

$y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2}$ homojen dif denk

A) $xdu + udx = 0$

B) $\dfrac{du}{u^2} = dx$

C) $\dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{dx}{x}$

D) $x^2du - u^2dx = 0$

E) $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{x^2u - u^2x^2}{x^2} \rightarrow u'x + \cancel{u} = \cancel{u} - u^2$

$u'x = -u^2$

$\dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{dx}{x}$ D.A olur

7. Aşağıdaki denklemlerden hangisi Lagrange diferansiyel denklemi <u>değildir</u>?

$y = xg(p) + f(p)$ $p = y'$ Lagrange denklemi

A) $x^2(y')^3 - xy = y'$ $\longrightarrow y = x\underbrace{p^3}_{g} - \dfrac{p}{x}$ uymuyor

B) $y = (y')^2\left(x + (y')^2\right) \longrightarrow y = x\underbrace{p^2}_{g} + \underbrace{p^4}_{f}$

C) $y - xy' - (y')^2 = 0 \longrightarrow y = x\underbrace{p}_{g} + \underbrace{p^2}_{f}$

D) $\ln y' - x(y')^2 = y'y \longrightarrow y = x\underbrace{(-p)}_{g} + \underbrace{\dfrac{\ln p}{p}}_{f}$

E) $y + y' = x(y' - e^{y'}) \longrightarrow y = x\underbrace{(p - e^p)}_{g} - \underbrace{p}_{f}$

8. $yy' = x(y')^2 - (y')^3$ **denkleminin tekil çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' = p$ için $yp = xp^2 - p^3 \Rightarrow y = xp - \underbrace{p^2}_{f(p)}$ Clairout denklemi

A) $y = 4x^2$

B) $y = 2x^2$

C) $y = \dfrac{x^2}{4}$

D) $y = \dfrac{x}{2}$

E) $x = \dfrac{y^2}{4}$

$\left.\begin{array}{l} x = -f'(p) \\ y = -f'(p)p + f(p) \end{array}\right)$

$f(p) = -p^2$ için $f'(p) = -2p$

$\left.\begin{array}{l} x = 2p \\ y = 2p \cdot p - p^2 = p^2 \end{array}\right]$

$y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{4}$ p tekilyer

$f''(p) = -2 \neq 0$ olduğu için $y = \dfrac{x^2}{4}$ tekil çözüm

veya

$F(x, y, p) = yp - xp^2 + p^3 = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial p} = y - 2xp + 3p^2 = 0 \rightarrow y = 2xp - 3p^2$

$p(2xp - 3p^2) - xp^2 + p^3 = 0 \Rightarrow 2xp^2 - 3p^3 - xp^2 + p^3 = 0$

$xp^2 = 2p^3 \Rightarrow x = 2p$

$y = 2p \cdot 2p - 3p^2 = p^2$

$y = \dfrac{x^2}{4}$ p tekil yeri

$y = \dfrac{x^2}{4}$ için $y' = \dfrac{x}{2}$

$yy' - x(y')^2 + (y')^3 = \dfrac{x^2}{4} \cdot \dfrac{x}{2} - x \cdot \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} = \dfrac{x^3}{4} - \dfrac{x^3}{4} = 0$ ✓

dif denk sağlandığı için $y = \dfrac{x^2}{4}$ tekil çözüm

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I B GRUBU FİNAL SORULARI-CEVAPLARI

.01.2021

1. $y = xy' + (y')^2 - 2y' + 1$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' = p$ için $y = xp + f(p)$ Clairaut denklemi olur.
$p = c$ için $y = xc + f(c)$ genel çözümdür

A) $y - cx = c^2$
B) $y = (cx-1)^2$
C) $y + 2c + c^2 = x$
D) $y - cx = c^2 + x$
E) $y = cx + (c-1)^2$

$y = xp + p^2 - 2p + 1$ Clairaut denklemi olup
$p = c$ için $y = xc + c^2 - 2c + 1$
$y = xc + (c-1)^2$ genel çözüm

2. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + \dfrac{y}{x}$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' - \frac{1}{x} y = 2x$ lineer dif denk

A) $yx = x^2 + c$
B) $y = x^2 + c$
C) $y = 2x^2 + cx$
D) $y = 2x^3 + cx$
E) $2y = x^2 + cx$

$a(x) = e^{\int -\frac{1}{x} dx} = e^{-\ln x} = x^{-1} = \frac{1}{x}$ olmak üzere
$\frac{1}{x} \cdot y = \int 2x \cdot \frac{1}{x} dx + c \Rightarrow \frac{y}{x} = 2x + c$
$y = 2x^2 + cx$ genel çözüm

3. $(y')^2 - (x+y)y' + xy = 0$ **denkleminin genel çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

$y' = p$ için $p^2 - (x+y)p + xy = 0 \Rightarrow (p-x)(p-y) = 0$
$-x \cdot -y$

A) $\left(y - \dfrac{x^2}{2} - c\right)(\ln y - x - c) = 0$
B) $(x - y^2 - c)(\ln y + x - c) = 0$
C) $c^2 - (x+y)c + xy = 0$
D) $(c-x)(c-y) = 0$
E) $\left(y - \dfrac{x^2}{2} - c\right)(y - x - c) = 0$

• $p - x = 0 \Rightarrow y' = x \Rightarrow dy = x dx \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + c$
• $p - y = 0 \Rightarrow y' = y \Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \ln y = x + c$

$\left(y - \frac{x^2}{2} - c\right)(\ln y - x - c) = 0$ genel çözüm

4. $c > 0, \quad y^2 - x^2 = c$ **eğri ailesini aşağıdakilerden hangisi dik keser?** → dik olması için eğimleri çarpımı -1 olmalı

$y^2 - x^2 = c \Rightarrow 2yy' - 2x = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$

A) $y = x^2 \rightarrow y' = 2x$
B) $x = y^2 \rightarrow 1 = 2yy' \rightarrow y' = \frac{1}{2y}$
C) $x^2 + y^2 = 1 \rightarrow 2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{y}$
D) $xy = 1 \rightarrow y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \longrightarrow \left(-\frac{y}{x}\right) \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = -1$ ✓
E) $x^2 - y^2 = 1 \rightarrow 2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$

5. $(y^n + x^n)y' - x^{n-1}y = 0, \quad x, y > 0$ **denklemi hangi** n **değeri için tam diferansiyel denklem olur?**

$\underbrace{(y^n + x^n)}_{N} dy - \underbrace{x^{n-1} y}_{M} dx = 0$

A) -2
B) -1
C) 0
D) 1
E) 2

$\left.\begin{array}{l} M_y = -x^{n-1} \\ N_x = n x^{n-1} \end{array}\right)$ $n = -1$ için $M_y = N_x$ olup TD dır.

6. $x^2y' = xy + y^2$ **denklemine** $u = u(x)$ **olmak üzere** $y = ux$ **dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki denklemlerden hangisi elde edilir?**

$y' = \dfrac{xy + y^2}{x^2}$ homojen denklemdir

A) $xdu - udx = 0$

B) $\dfrac{du}{u^2} = dx$

C) $\dfrac{du}{2u} = -\dfrac{dx}{x}$

D) $x^2du - u^2dx = 0$

E) $\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$

$y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$

$u'x + u = \dfrac{x^2u + u^2x^2}{x^2} \Rightarrow u'x + \cancel{u} = \cancel{u} + u^2$

$u'x = u^2$

$\dfrac{du}{u^2} = \dfrac{dx}{x}$ DA dır.

7. **Aşağıdaki denklemlerden hangisi Lagrange diferansiyel denklemi değildir?**

$y = xg(p) + f(p)$, $p = y'$ Lagrange denklemi

A) $y = (y')^2(x + y') \rightarrow y = x\underbrace{p^2}_{g} + \underbrace{p^3}_{f}$ ✓

B) $y - y' = x(y' + e^{y'}) \rightarrow y = x\underbrace{(p + e^p)}_{g} + \underbrace{p}_{f}$ ✓

C) $x^2(y')^2 = xy + y' \rightarrow y = x\underbrace{p^2}_{g} - \underbrace{\frac{p}{x}}_{}$ uymuyor

D) $y - xy' - (y')^2 = 0 \rightarrow y = x\underbrace{p}_{g} + \underbrace{p^2}_{f}$ ✓

E) $\ln y' - x(y')^2 = y'y \rightarrow y = x\underbrace{(-p)}_{g} + \underbrace{\frac{\ln p}{p}}_{f}$ ✓

8. $y = xy' - e^{y'}$ **denkleminin tekil çözümü aşağıdakilerden hangisidir?**

A) $y = x\ln x - x$

B) $y = \ln x - e^x$

C) $y = \ln x - x$

D) $y = x + e^x$

E) $y = xe^x - x$

$y' = p$ için $y = xp \underbrace{- e^p}_{f(p)}$ Clairaut denklemidir

$x = -f'(p)$
$y = -f'(p)p + f(p)$

$f(p) = -e^p$, $f'(p) = -e^p$

$x = e^p$
$y = pe^p - e^p$

$p = \ln x$
$y = \ln x . x - x$

$y = x\ln x - x$

p tekil yeri

$f''(p) = -e^p \neq 0$ olduğu için

$y = x\ln x - x$ tekil çözümdür

veya $f(x, y, p) = y - xp + e^p = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial p} = -x + e^p = 0$

$\rightarrow y = pe^p - e^p$
$x = e^p$

$y = x\ln x - x$ p tekil yeri

$y' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

$y = xy' - e^{y'} \Rightarrow x\ln x - x = x.\ln x - e^{\ln x}$

$x\ln x - x = x\ln x - x$ ✓ denklemi sağladığı için

$y = x\ln x - x$ tekil çözümdür